

Criteri di resistenza

Riferimenti bibliografici

Juvinall, Marshek “Fondamenti della progettazione dei componenti delle macchine”

Shigley et al. “Progetto e costruzione di macchine”

Petrucci G. “Dispense delle Lezioni di Costruzione di macchine”

<http://www.dima.unipa.it/~petrucci/didattica.htm#DIS>

Broggiato G.B. “Dispense delle Lezioni di Costruzione di macchine”

<http://dma.ing.uniroma1.it/users/broggiato/cdm/roma/vo/ecdm/dispense/%5B07%5DCriteriResistenza1.pdf>

I Criteri di Resistenza

- Il cedimento (rottura, *failure*) può essere definito come **l'evento che pregiudica la capacità del componente in oggetto a svolgere la funzione per la quale è stato realizzato/progettato**
- Il progettista ha a sua disposizione dati relativi
 - *al materiale* con il quale si realizza la struttura
 - *alla geometria e ai carichi* che la struttura deve sopportare (sollecitazioni)
- È necessario disporre di strumenti analitici che siano in grado di correlare tipo e valore delle sollecitazioni (complesse) alle caratteristiche del materiale (spesso rilevate con prove caratterizzate dalla presenza di sollecitazioni semplici) al fine di stabilire se queste ultime sono compatibili con l'integrità strutturale.
- Questi strumenti sono i **Criteri di Resistenza**

Tipi di cedimento

Il cedimento, che è prodotto dall'azione dei carichi agenti sulla struttura (considerati statici per il momento), è legato essenzialmente a due tipi di fenomeno:

Deformazione plastica (distorsione)

È associata a tensioni di taglio e comporta lo scorrimento del materiale lungo piani di scorrimento naturali la cui geometria è legata alla struttura cristallina del materiale

Si ha cedimento quando si raggiunge un limite arbitrario di deformazione plastica (es. 0.2% di deformazione residua)

Frattura

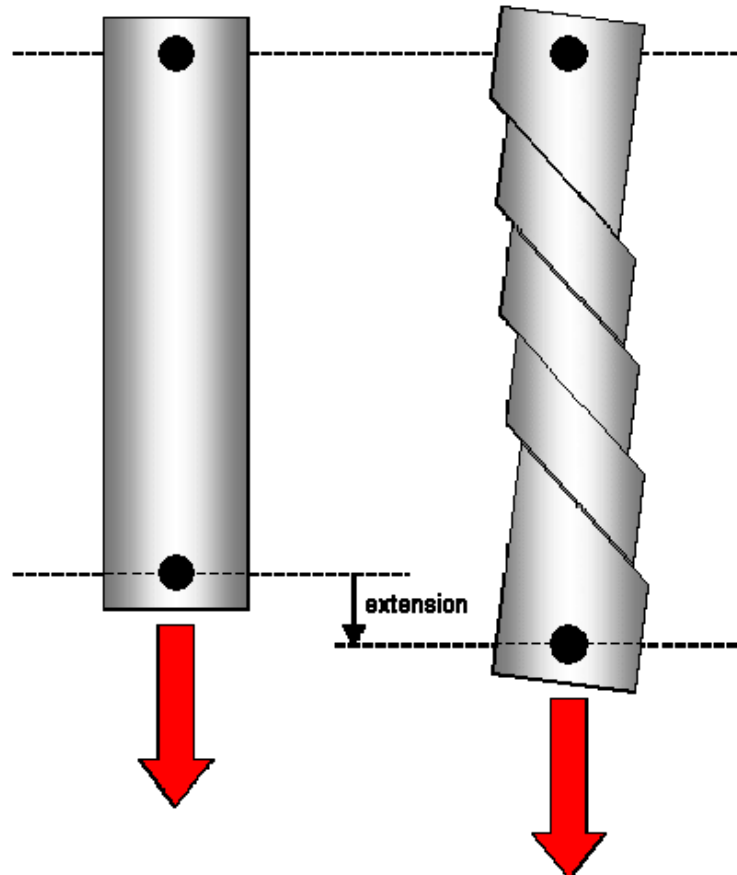
È definita dalla separazione (o frammentazione) di un pezzo in due o più parti associata a tensioni di trazione

Il cedimento per frattura è molto più intuitivo e chiaro da definire, quello per distorsione più sfumato.

Tipi di cedimento

Deformazione plastica (distorsione)

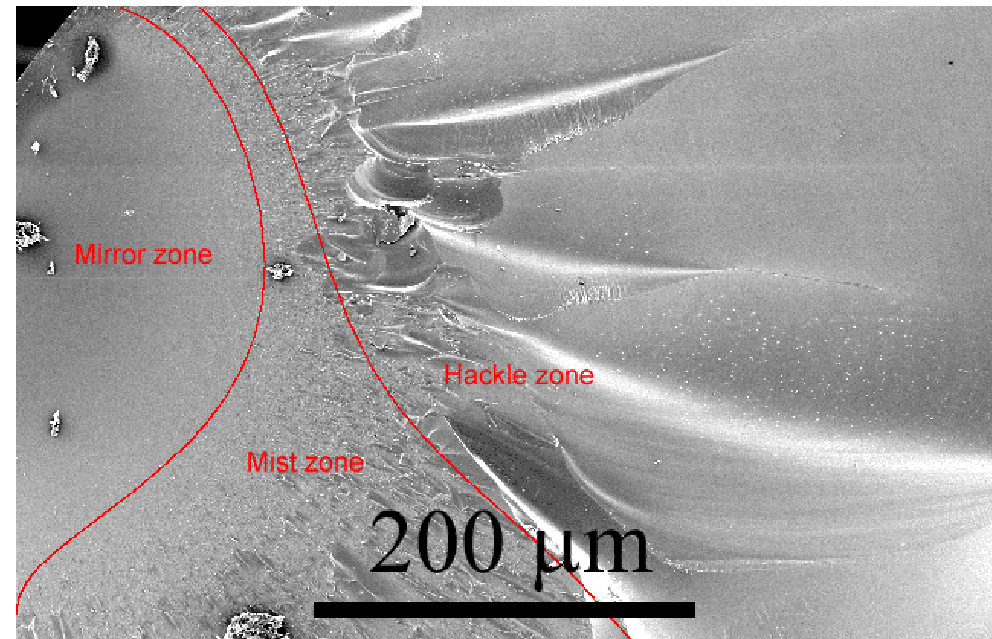
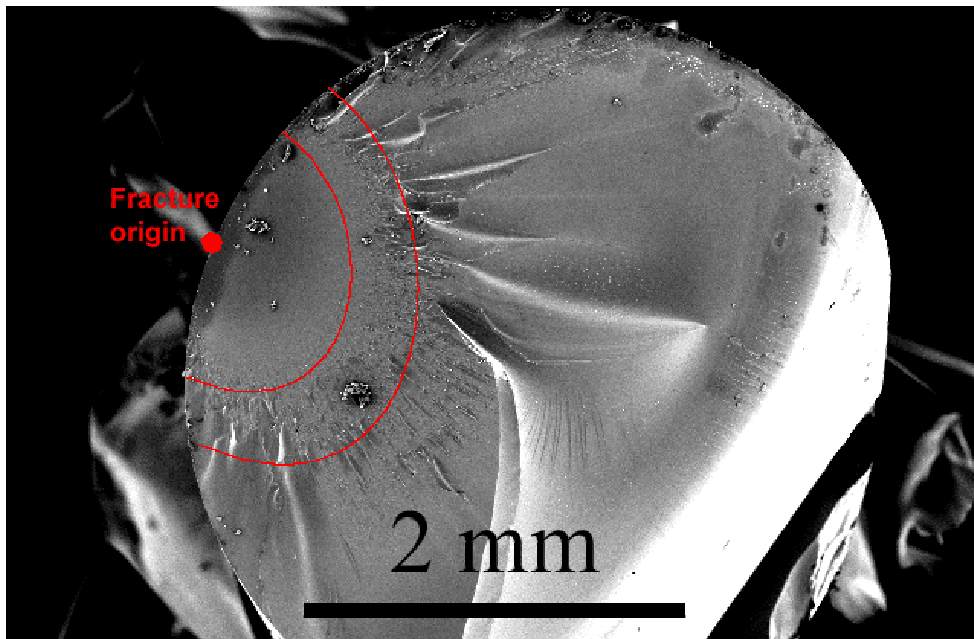
È associata a tensioni di taglio e comporta lo scorrimento del materiale lungo piani di scorrimento naturali.



Tipi di cedimento

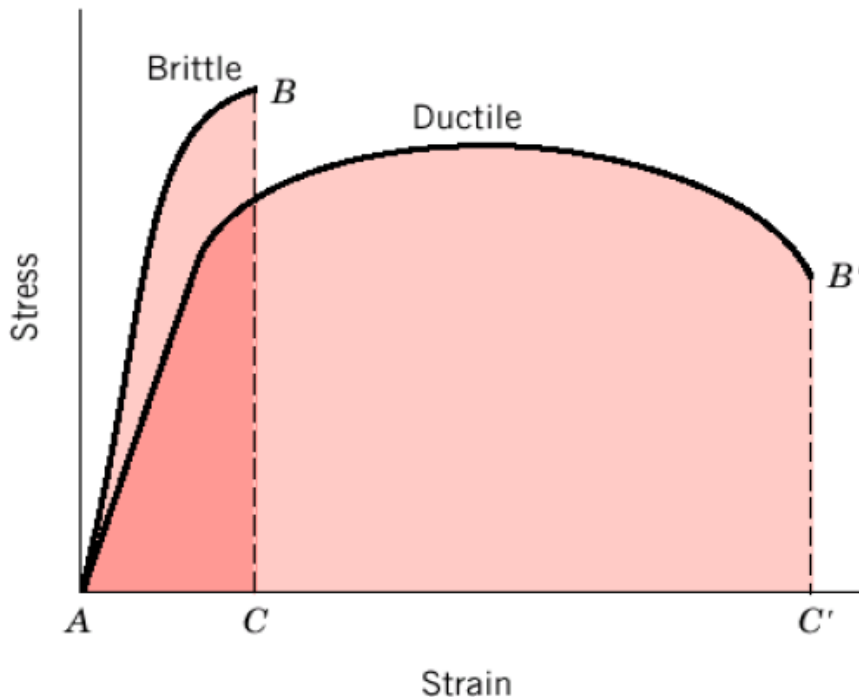
Frattura

È definita dalla separazione (o frammentazione) di un pezzo in due o più parti associata a tensioni di trazione



Tipi di Cedimento

In generale i materiali soggetti a cedimento per distorsione vengono definiti **ductili**, mentre quelli soggetti a frattura senza apprezzabile distorsione vengono detti **fragili**



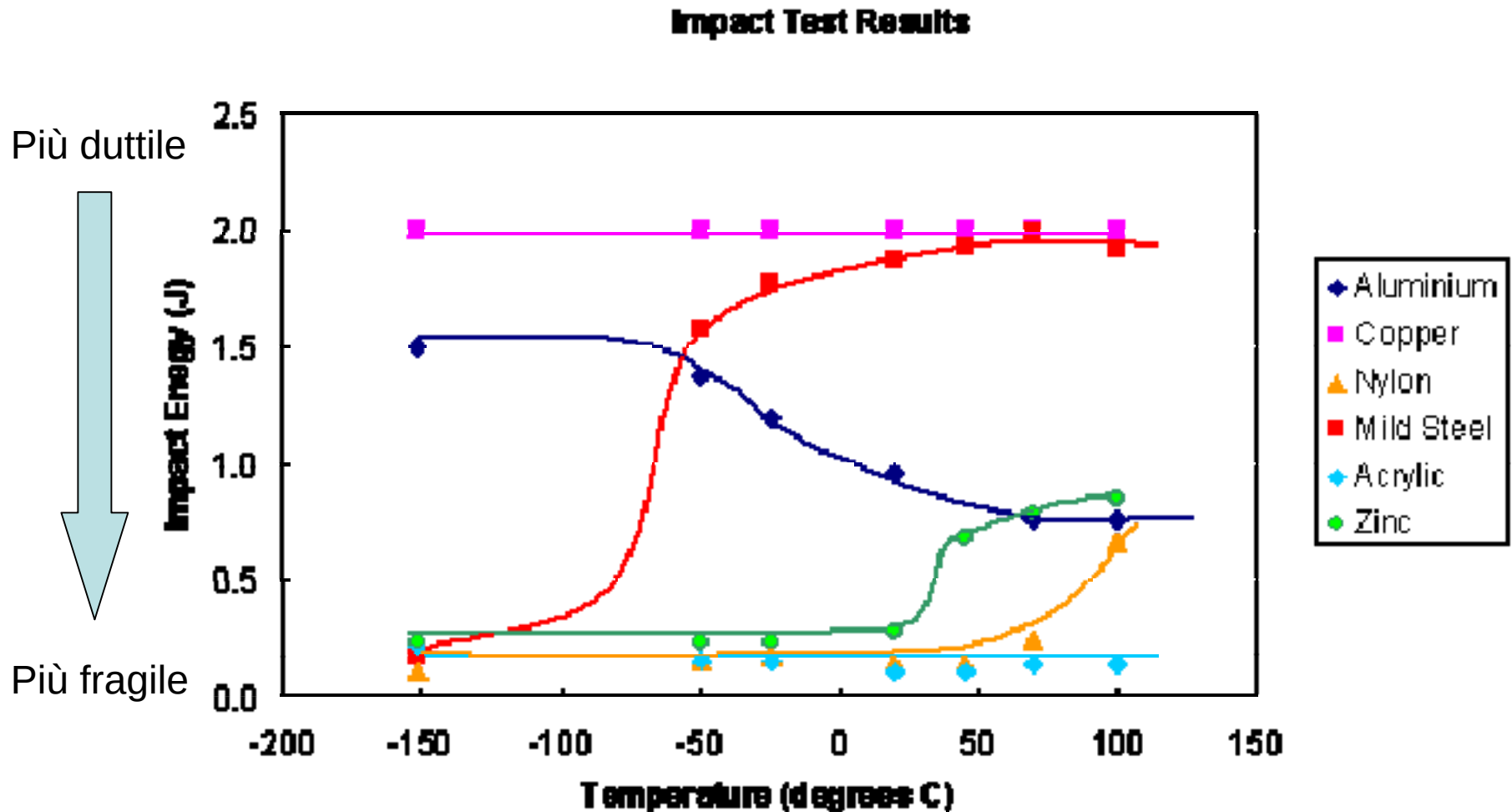
Il confine non è sempre così ben definito

- **Intagli acuti (concentrazione delle tensioni)**
- **Carichi da impatto**
- **Temperatura (di transizione)**

...possono mutare il comportamento del materiale portandolo da una tipologia all'altra

Tipi di Cedimento

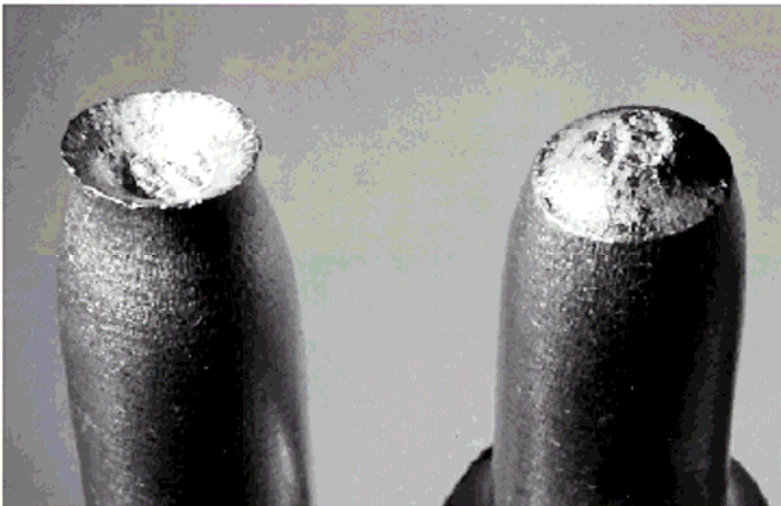
Transizione fragile-duttile



Tipi di Cedimento

DUTTILI

- *Allungamento a rottura > 0.05*
- *Tensione di snervamento identificabile in modo chiaro e netto*
- *Tensione di snervamento simile in trazione e compressione*

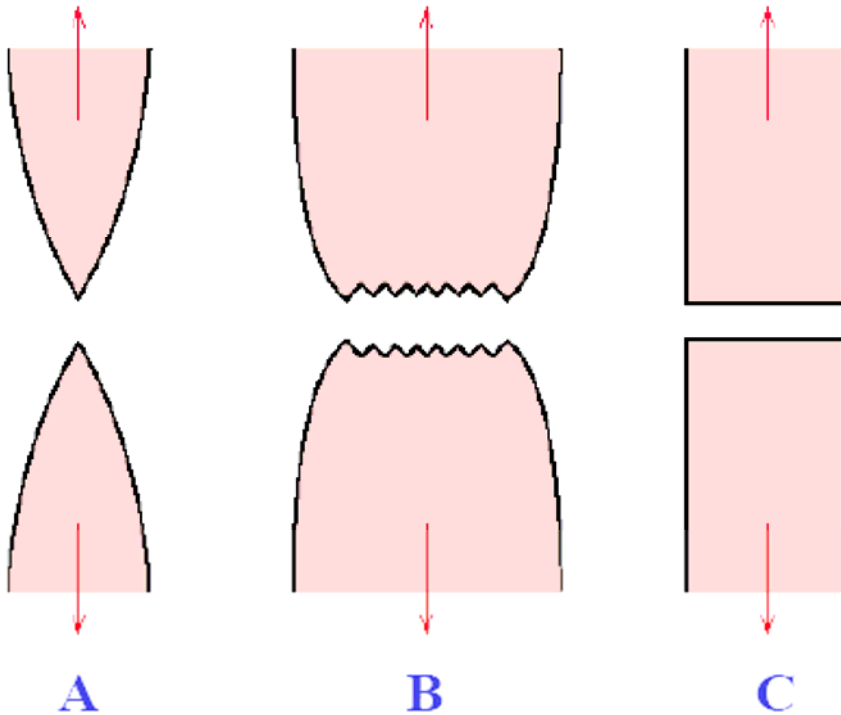


FRAGILI

- *Allungamento a rottura < 0.05*
- *Non snervano (la tensione di snervamento non è identificabile in modo chiaro e netto)*
- *Tipicamente si classificano in base alla tensione di rottura*



Tipi di Cedimento



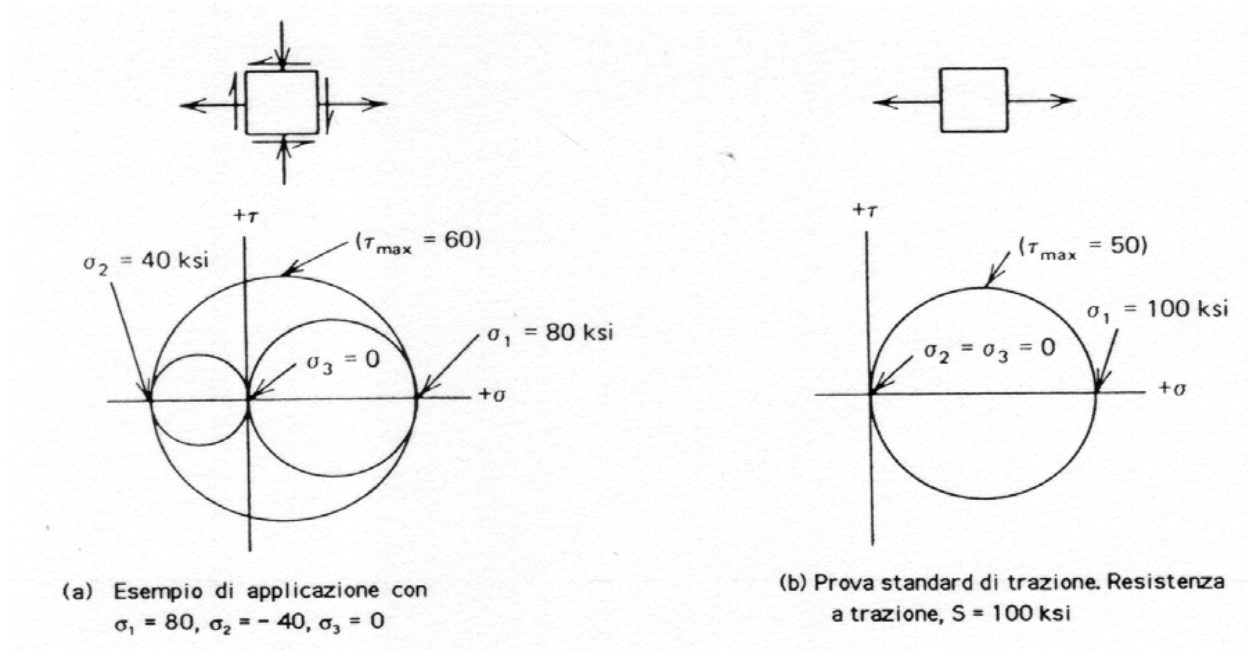
A. Materiali molto duttili (Piombo, Oro, etc.) a temperatura ambiente, altri materiali, polimeri, vetro ad alte temperature.

Significativo assorbimento di energia e grande deformazione plastica

B. Frattura moderatamente duttile (la maggior parte dei metalli)

C. Frattura fragile (metalli a basse temperature, ceramiche). Bassissimo assorbimento di energia e quasi inesistente deformazione plastica.

La teoria dei criteri



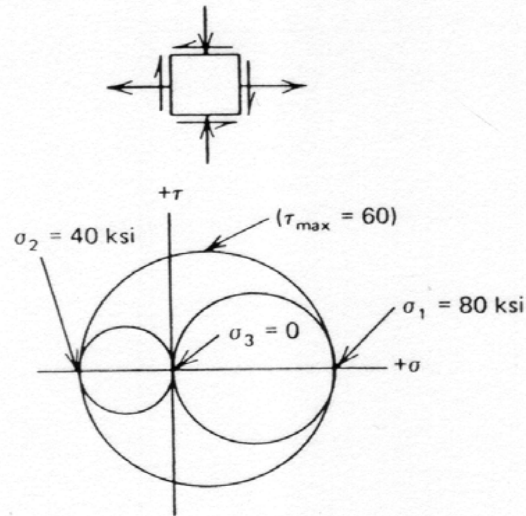
1. *Dato un generico stato di sollecitazione complesso....*
2. *Dati i risultati di prove uniassiali di trazione....*

È possibile che la sollecitazione produca il cedimento del materiale?

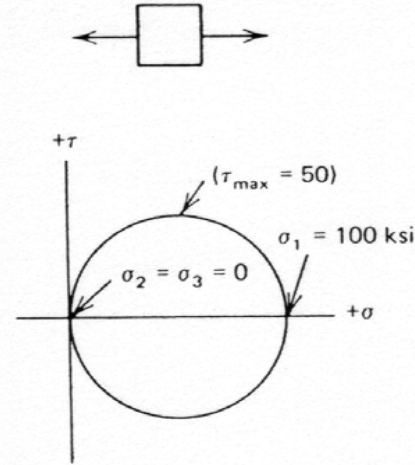
Ovviamente non è possibile pensare di sottoporre il materiale a n possibili combinazioni di tensione!!!

NB 1ksi = 6.89 MPa

La teoria dei criteri



(a) Esempio di applicazione con $\sigma_1 = 80$, $\sigma_2 = -40$, $\sigma_3 = 0$



(b) Prova standard di trazione. Resistenza a trazione, $S = 100$ ksi

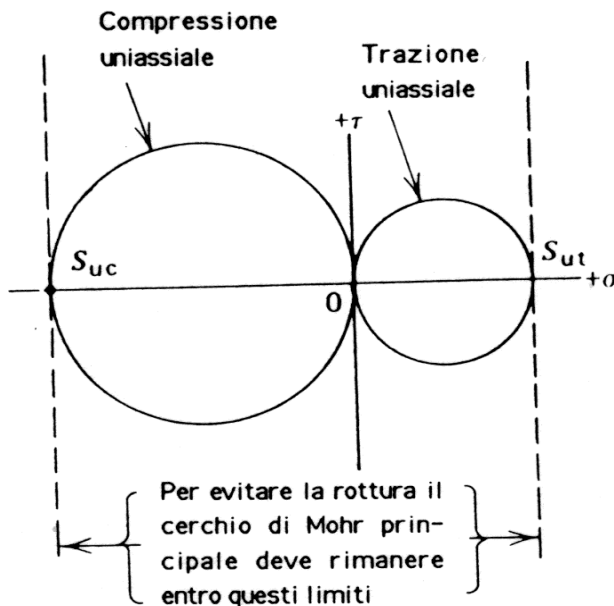
La filosofia che sta alla base dei criteri di resistenza...

Qualunque sia la causa del cedimento nella prova di trazione la stessa causa sarà responsabile del cedimento in tutte le altre possibili condizioni di carico statico

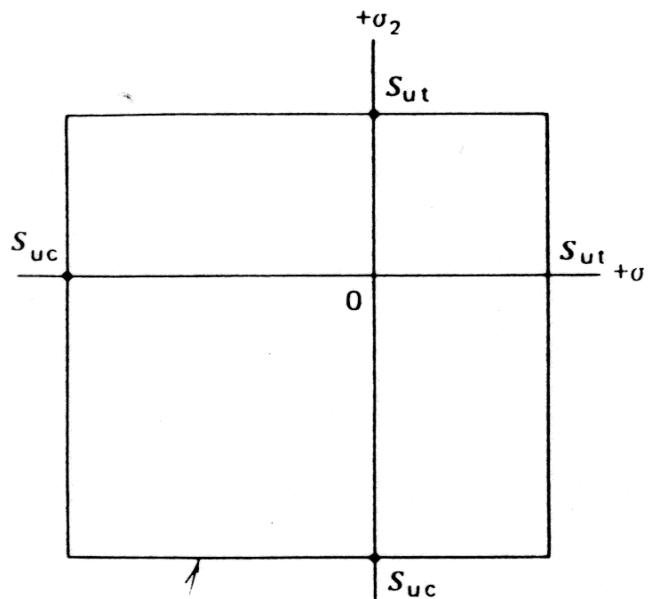
I criteri si avvalgono di considerazioni di tipo teorico, ma spesso vengono “calibrati” sulla base delle evidenze sperimentali

Criterio della **Massima Tensione Normale**

Formulato da W.J.M. Rankine, ipotizza che il cedimento (per rottura) avvenga ogni volta che la tensione di trazione (compressione) a cui è sottoposto il materiale superi la resistenza uniassiale a trazione (compressione)



(a) Cerchio di Mohr



Per stati di tensione biassiali ($\sigma_3 = 0$) il punto $\sigma_1 - \sigma_2$ deve giacere in questa area per evitare la rottura

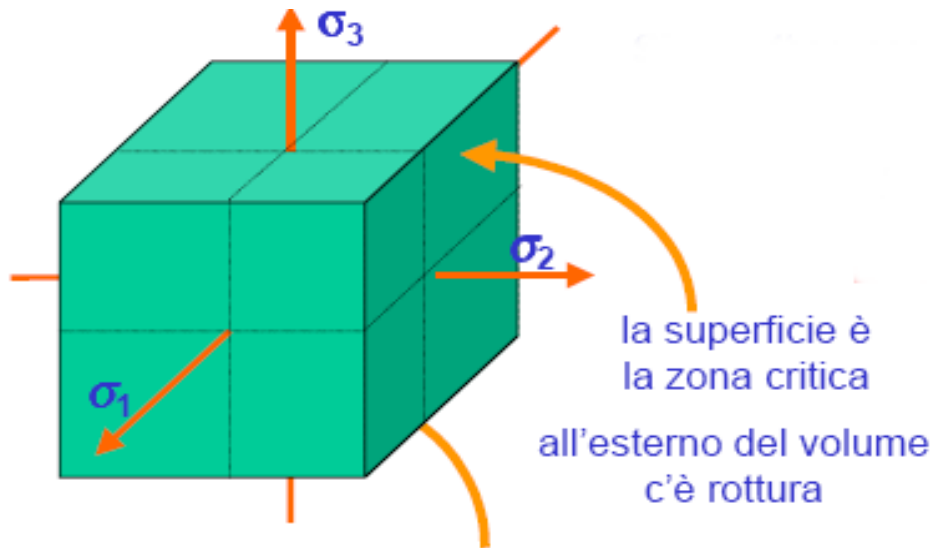
(b) Grafico $\sigma_1 - \sigma_2$

Condizione di cedimento

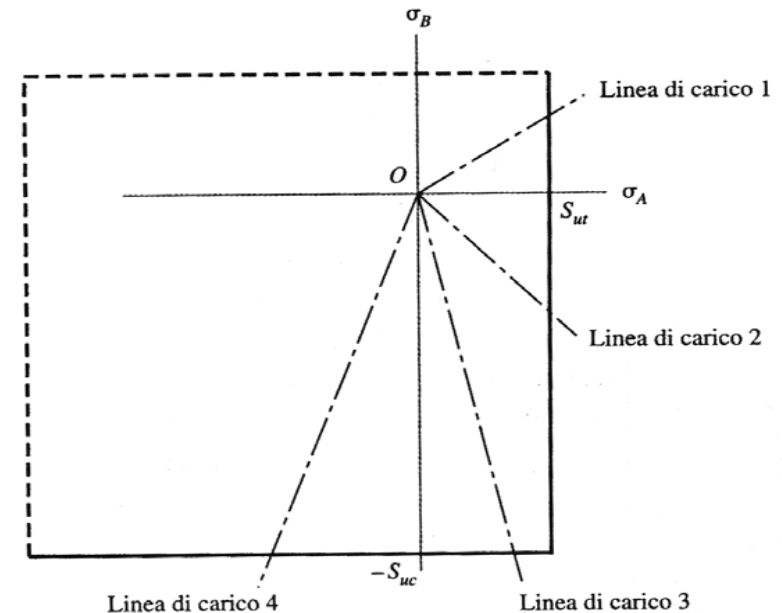
$$\begin{cases} \sigma_1 < S_{ut} \\ \sigma_2 > S_{uc} \end{cases}$$

Criterio della **Massima Tensione Normale**

È stato dimostrato che questo criterio si correla ragionevolmente bene con i dati sperimentali relativi a **materiali fragili** e non è adatto alla previsione di rotture duttili

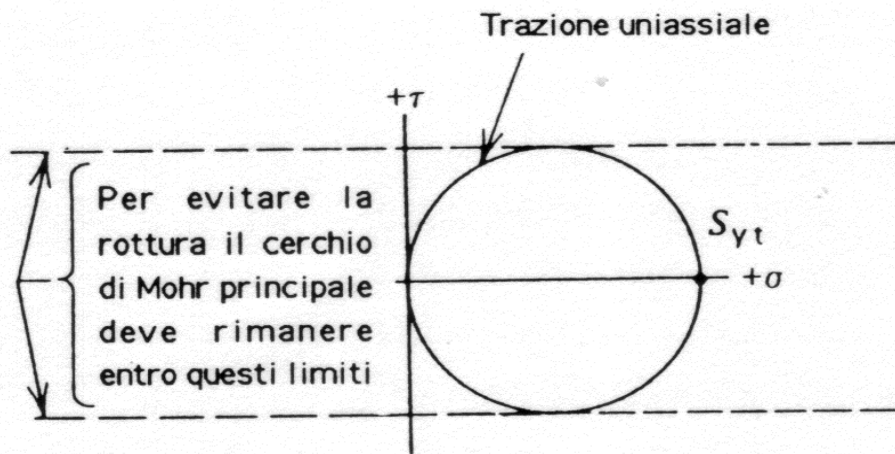


all'interno del volume il materiale resiste



Criterio della **Massima Tensione Tangenziale**

Inizialmente proposto da C.A. Coulomb, ma meglio noto come criterio di Guest-Tresca, ipotizza che **il cedimento (per snervamento) si verifica quando la massima tensione tangenziale nel punto considerato raggiunge o supera la massima tensione tangenziale che provoca l'inizio dello snervamento in un provino dello stesso materiale soggetto ad una prova di trazione semplice.**



Lo snervamento nei materiali duttili è causato dallo scorrimento dei piani cristallini lungo le superfici di massimo sforzo tangenziale

Dunque il materiale, in un certo punto, è considerato sicuro se lo sforzo massimo tangenziale in quel punto è inferiore a quello massimo tangenziale registrato allo snervamento

Criterio della **Massima Tensione Tangenziale**

È una teoria facile da usare e si è dimostrata essere in buon accordo con i risultati sperimentali relativi a **materiali duttili** (ricordiamo che si prende in esame lo snervamento)

In un provino sottoposto a trazione semplice si ha

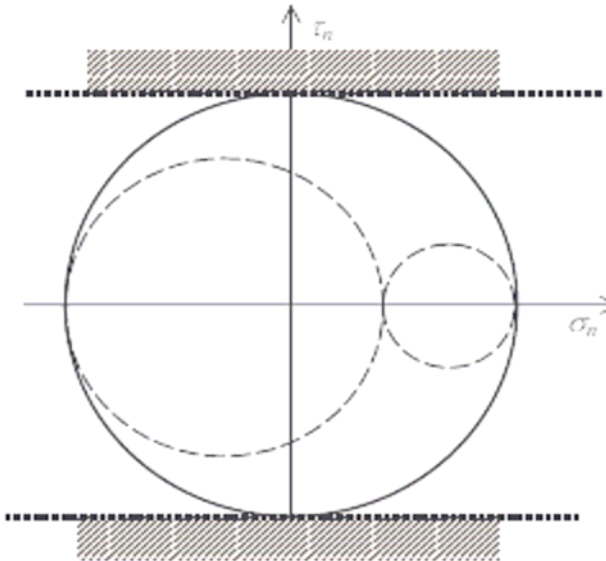
$$\tau_s = \frac{1}{2}(\sigma_s - 0) = \frac{1}{2}\sigma_s$$

Per uno stato tensionale generico, le tensioni di taglio massime agenti nei piani principali sono date da

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_j) \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j$$

Lo snervamento si verifica quando $\tau_{\max} = \tau_s$ ossia:

$$\max \left[\frac{1}{2} |\sigma_i - \sigma_j| \right] = \frac{1}{2} \sigma_s$$



Criterio della **Massima Tensione Tangenziale**

$$\max \left[\left| \sigma_i - \sigma_j \right| \right] = \sigma_s$$

Equazione dei piani di un esagono

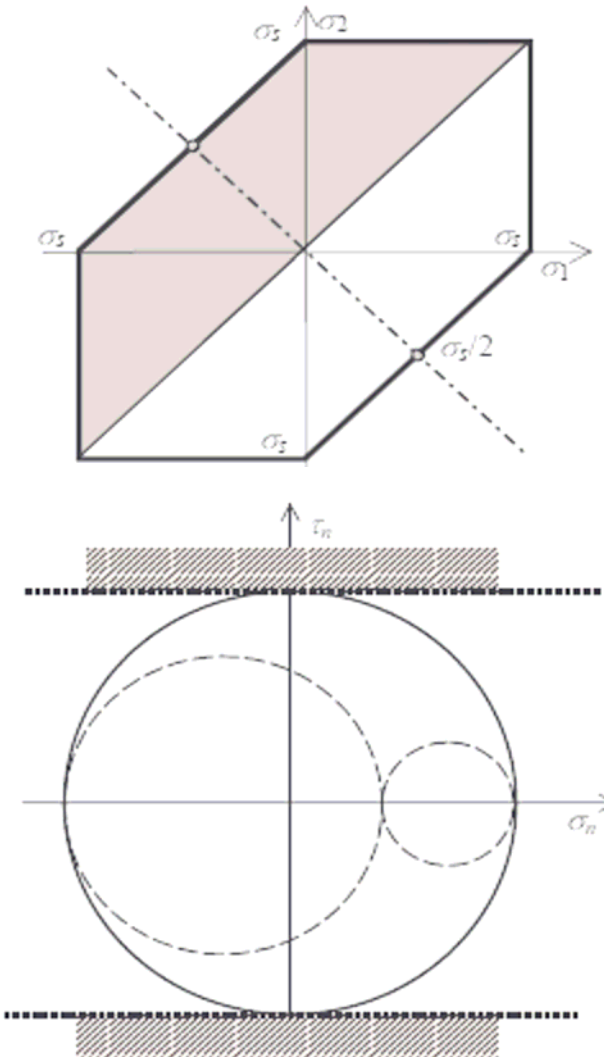
Quindi la tensione equivalente da confrontare con quella ammissibile (che sarà in generale una frazione η di quella di snervamento se si vuole assumere un certo margine di sicurezza) vale:

$$\sigma_e = \max \left[\left| \sigma_1 - \sigma_2 \right|, \left| \sigma_1 - \sigma_3 \right|, \left| \sigma_2 - \sigma_3 \right| \right] < \sigma_s \left(\frac{1}{\eta} \right)$$

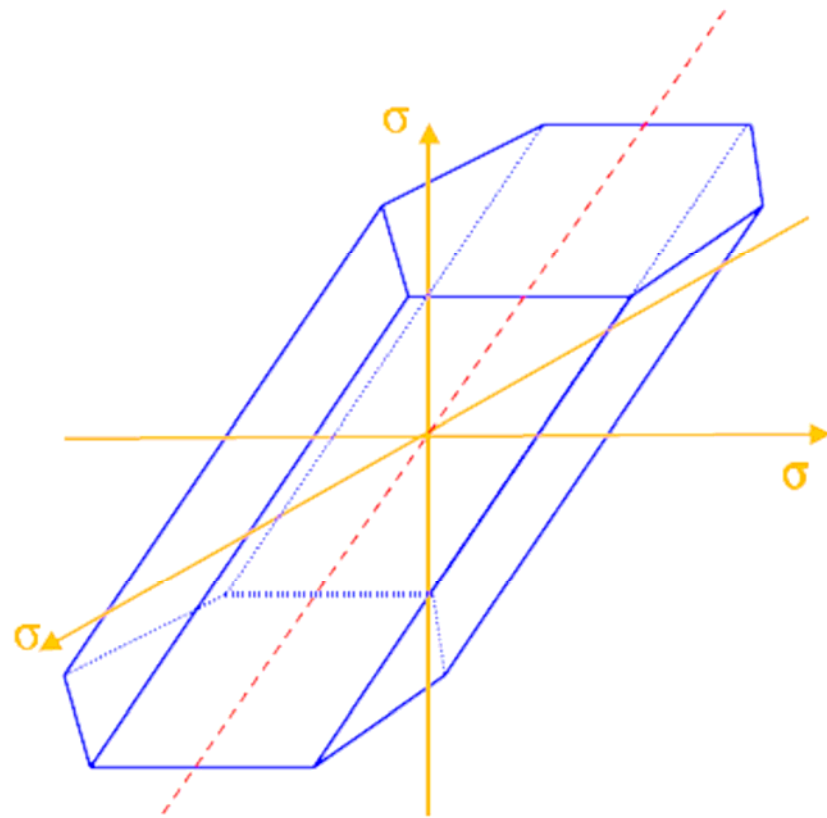
Nel caso biassiale ($\sigma_3=0$) e tensioni agenti sul piano, si ottiene:

$$\sigma_e = \max \left[\left| \sigma_1 - \sigma_2 \right|, \left| \sigma_1 \right|, \left| \sigma_2 \right| \right]$$

Nel piano di Mohr, gli stati di tensione limite sono rappresentati da cerchi tangenti alle rette parallele all'asse σ e aventi per equazione $\tau = \pm \sigma_s/2$



Criterio della **Massima Tensione Tangenziale**



superficie critica definita
dal criterio di Tresca
nello spazio delle
tensioni principali

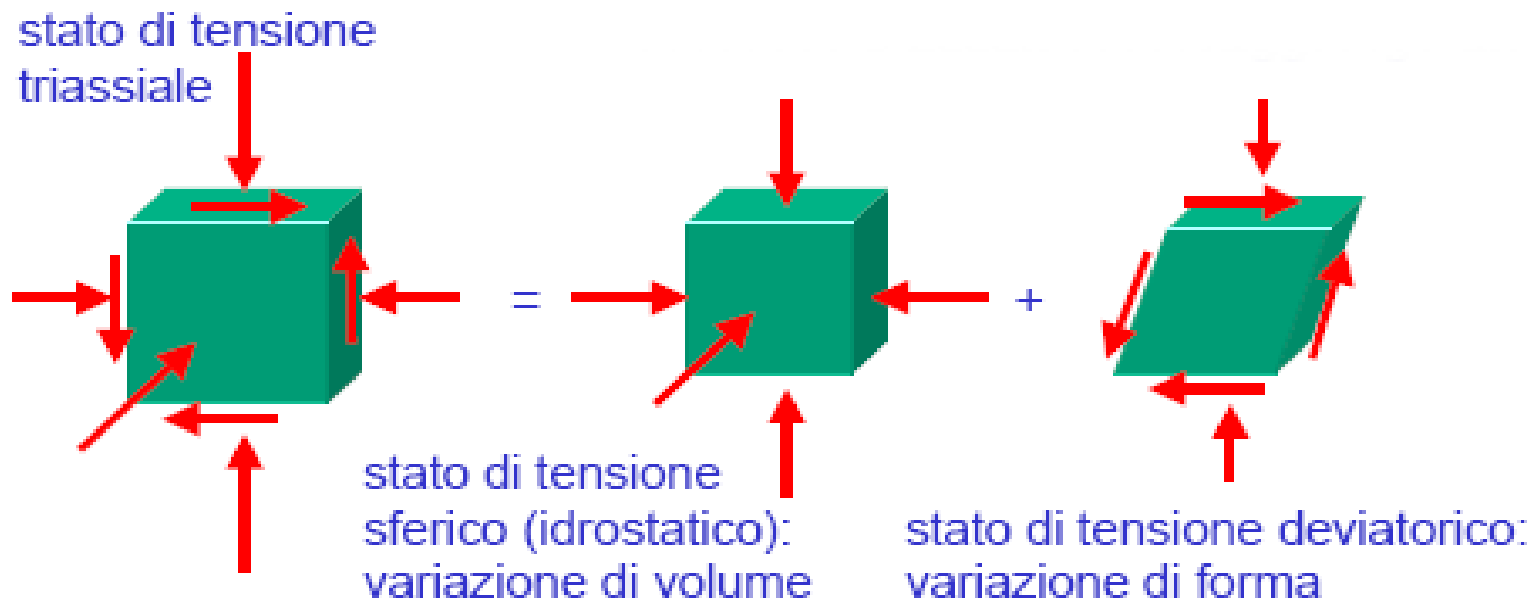
Criterio della **Massima Energia di Distorsione**

Le relazioni che descrivono questo criterio sono state formulate in modo indipendente da M.T. **Hueber**, R. **von Mises** e H. Hencky anche se di recente si è scoperto che già Maxwell a metà '800 aveva postulato i principi che stanno alla base del criterio.

Considerazioni di partenza

- Ogni materiale sollecitato elasticamente subisce un (piccolo) cambiamento di forma, di volume o di entrambi
- L'energia necessaria a produrre tale cambiamento viene immagazzinata nel corpo sotto forma di energia elastica.
- Tuttavia, un certo materiale ha una **limitata e definita capacità di assorbire energia di distorsione**, ossia **energia tendente a cambiare la forma** ma non il volume
- Ogni tentativo di incrementare l'energia di distorsione ceduta al corpo oltre quel dato limite produce lo snervamento

Criterio della **Massima Energia di Distorsione**



Criterio della **Massima Energia di Distorsione**

L'energia di distorsione (detta anche “energia elastica di deformazione”) può essere determinata, per esempio, con la prova semplice di trazione e in questo caso è pari all'energia di deformazione relativa alla tensione monoassiale di snervamento.

L'impiego del criterio MED, meno semplice di quello MTT ma anche più aderente alla realtà sperimentale, si basa sull'introduzione del concetto di **tensione equivalente**, definita come **la tensione uniassiale di trazione che produrrebbe lo stesso livello di energia di distorsione prodotto dall'effettivo stato di tensione in esame**.

In termini di tensioni principali, l'equazione della tensione equivalente è la seguente:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{[(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2]}$$

che si trasforma, per uno stato tensionale piano, nell'equazione di un'ellisse

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

Nel caso di tensione puramente tangenziale, con $\sigma_1 = \tau$ e $\sigma_2 = -\sigma_1$ si ottiene

$$\tau_s = 0.577 \sigma_s$$

Criterio della **Massima Energia di Distorsione**

Quando sono note le tensioni σ_x , σ_y e τ_{xy} una forma conveniente per definire la tensione equivalente è la seguente:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

e, qualora sia presente una sola sollecitazione si ha:

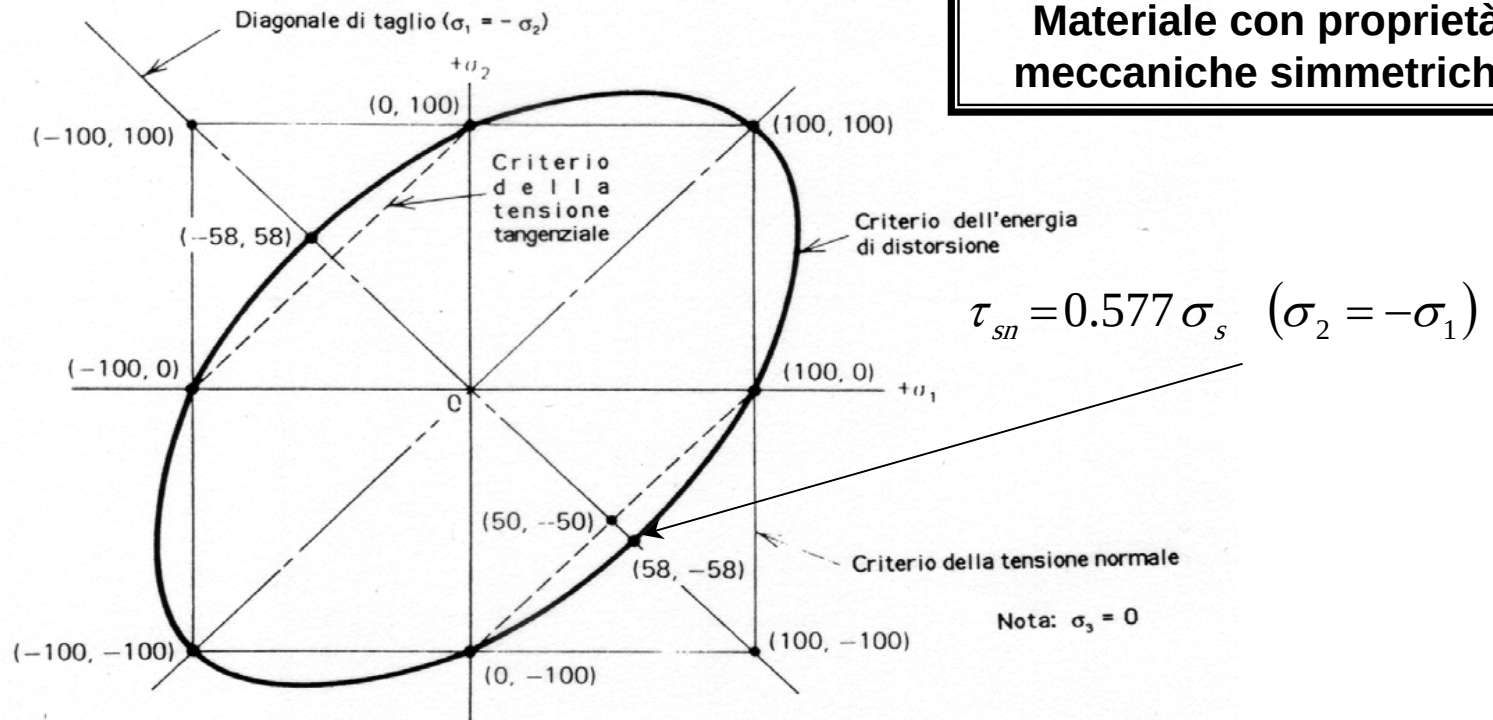
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

Una volta calcolata la tensione equivalente, si procede al confronto con la sollecitazione di snervamento del materiale ottenuta dalla prova uniassiale di trazione. Si ha snervamento quando

$$\sigma_{eq} \geq S_y$$

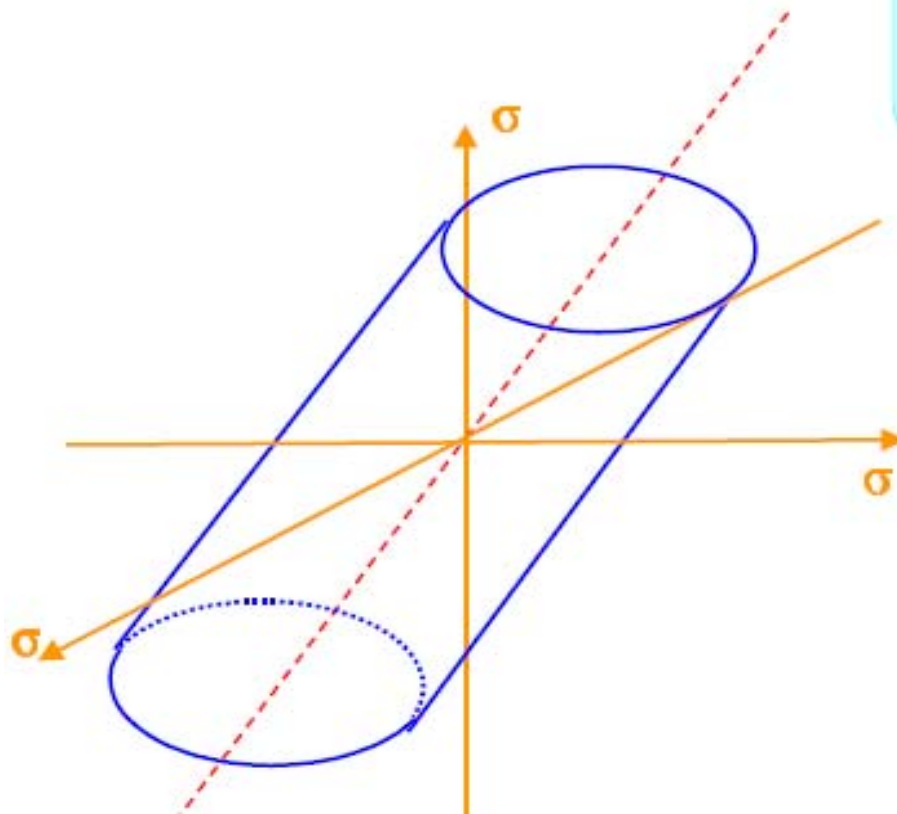
Criterio della Massima Energia di Distorsione

Materiale con proprietà
meccaniche simmetriche



Per uno stato di sollecitazione biassiale, il criterio MED si rappresenta graficamente con un'ellisse. Confrontando i tre criteri finora visti, si osserva che i criteri MTT e MED sono in buon accordo tra loro, con il criterio MED che accredita al materiale una resistenza superiore in misura variabile tra lo 0 e il 15%

Criterio della **Massima Energia di Distorsione**



superficie critica definita
dal criterio di Von Mises
nello spazio delle
tensioni principali

È stato osservato nella pratica, che non tutti i materiali duttili presentano la stessa resistenza a trazione e a compressione, per es. la tensione di snervamento delle leghe di Mg, in compressione è tipicamente inferiore di circa il 50% rispetto a quella di trazione. La tensione di rottura delle ghise grigie in compressione è addirittura 3-4 volte maggiore di quella a trazione.

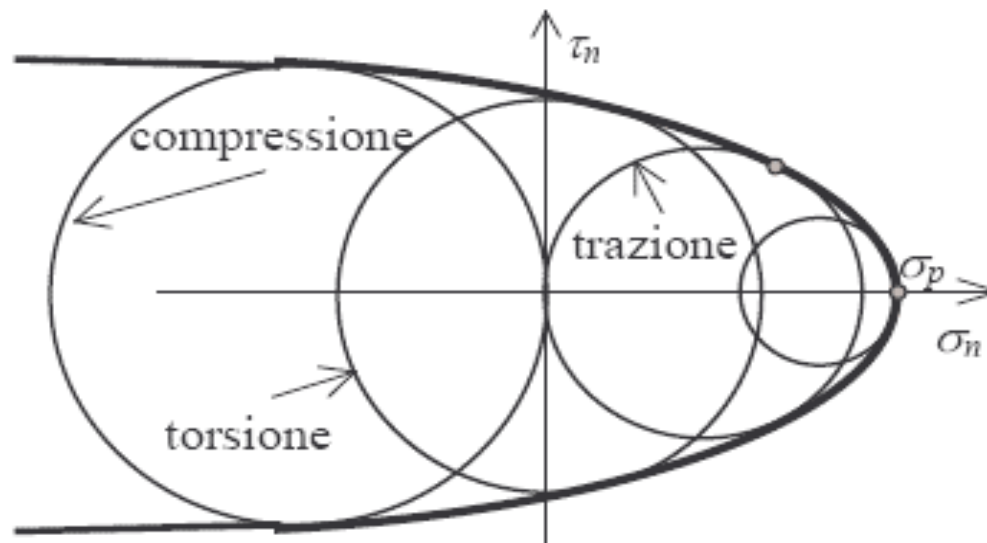
Dunque appare opportuna la scelta fatta da alcuni scienziati del '900 di formulare **criteri adattabili a materiali caratterizzati da un diverso comportamento a trazione e compressione.**

Tra questi, un ruolo fondamentale riveste il **criterio di Mohr**, che si basa sull'esecuzione di prove semplici (trazione, compressione, taglio, trazione triassiale, ecc.) condotte fino allo snervamento del materiale (se questo può snervare) oppure fino alla rottura.

Secondo il criterio di Mohr la rottura si verifica quando, durante l'applicazione del carico, i tre cerchi relativi allo stato di sollecitazione esistente si espandono fino a che uno di essi diventa **tangente all'involuppo di guasto** (specifico per ciascun materiale utilizzato)

Criterio di **Mohr**

La rottura si verifica quando, durante l'applicazione del carico, i tre cerchi si espandono fino a che uno di essi diventa tangente all'involucro di guasto (specifico per ciascun materiale utilizzato)



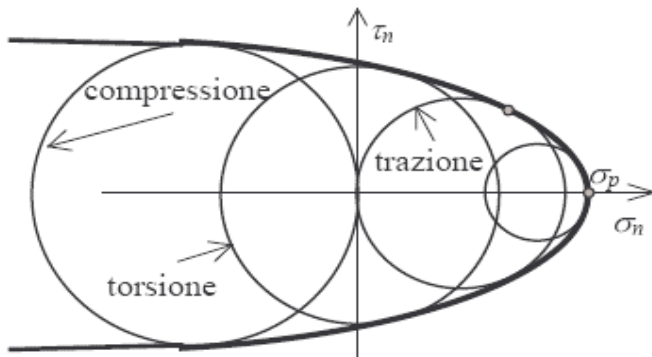
Criterio di **Mohr**

- Ovviamente tutti gli stati tensionali i cui cerchi maggiori sono tangenti alla curva di Mohr sono stati limite per il materiale
- È da osservare che il taglio massimo sopportabile dal materiale è maggiore in presenza di uno stato di compressione
- Per tracciare le curve di Mohr sarebbe necessario eseguire **almeno** le prove di trazione, compressione, torsione più una prova in stato triplo di sollecitazione (trazione)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_p$$

Alcune caratteristiche delle curve di Mohr

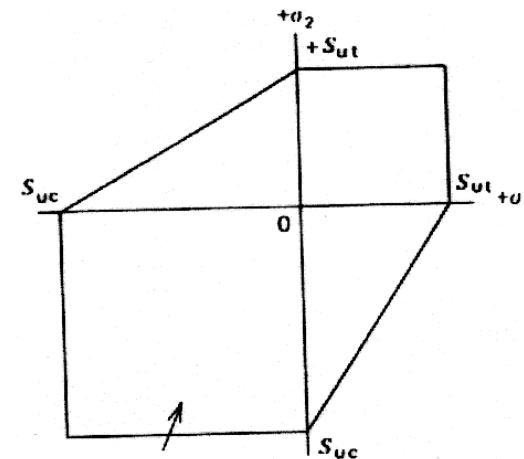
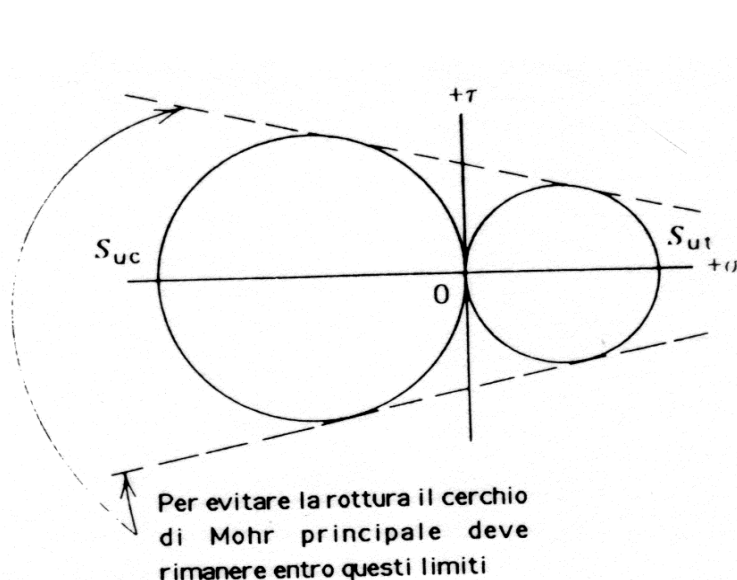
- Simmetriche rispetto all'asse delle σ perché il cedimento non dipende dal segno delle τ
- Dalla parte delle σ negative tendono a diventare parallele perché per compressione idrostatica non si ha rottura



Criterio di Mohr-Coulomb

Una versione semplificata del criterio di Mohr (definita “Criterio di Mohr-Coulomb” o “teoria degli attriti interni”) definisce una curva limite di Mohr costruita prendendo in considerazione i **solli cerchi relativi alle prove di compressione e trazione** e dunque approssimando la curva, vista nel caso precedente, con due rette.

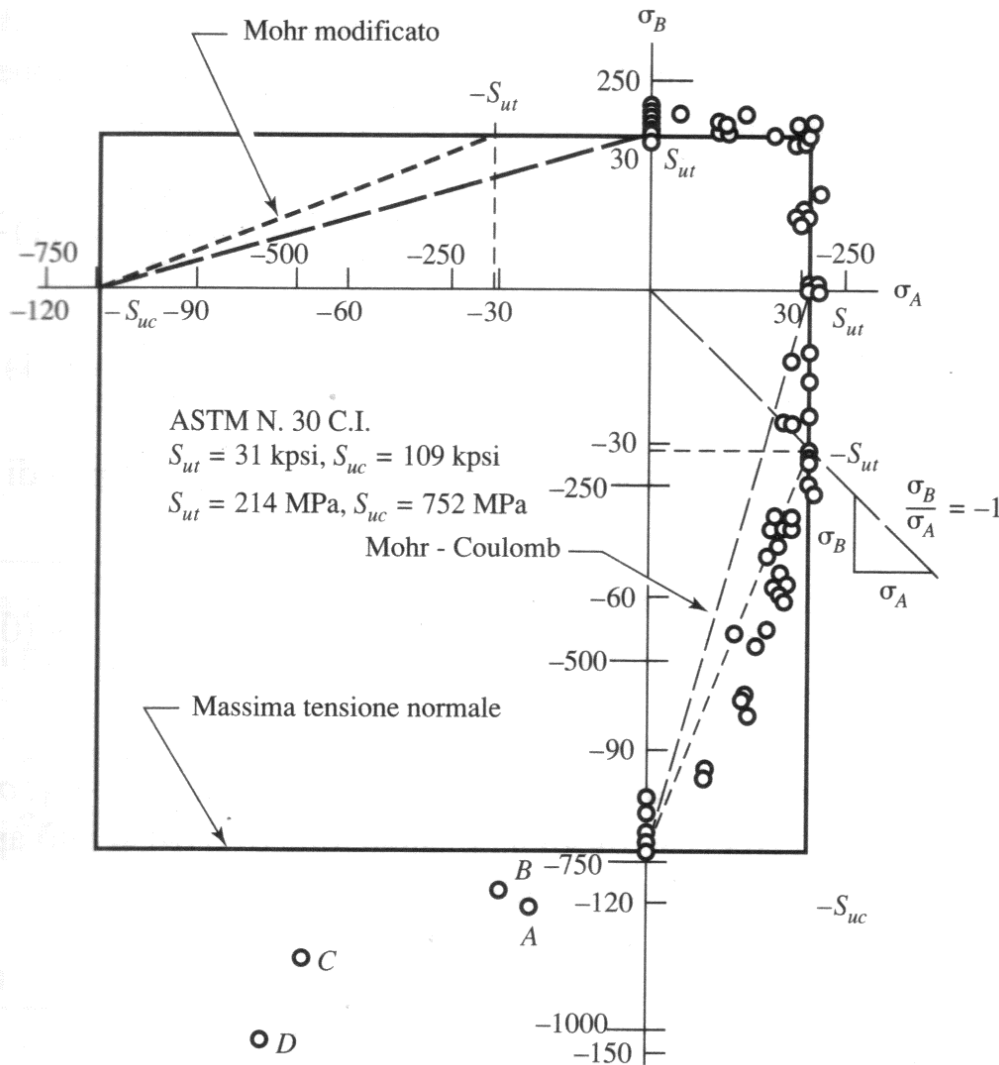
Si può osservare come questo criterio venga generalmente considerato come una **modifica (su base empirica) del criterio della massima tensione tangenziale** che impiega valori sperimentali per quanto riguarda le resistenze a trazione e compressione.



Per stati di tensione biassiali ($\sigma_3 = 0$)
il punto $\sigma_1, -\sigma_2$ deve giacere in questa
area per evitare la rottura

(b) Grafico $\sigma_1, -\sigma_2$

Criterio di **Mohr Modificato**

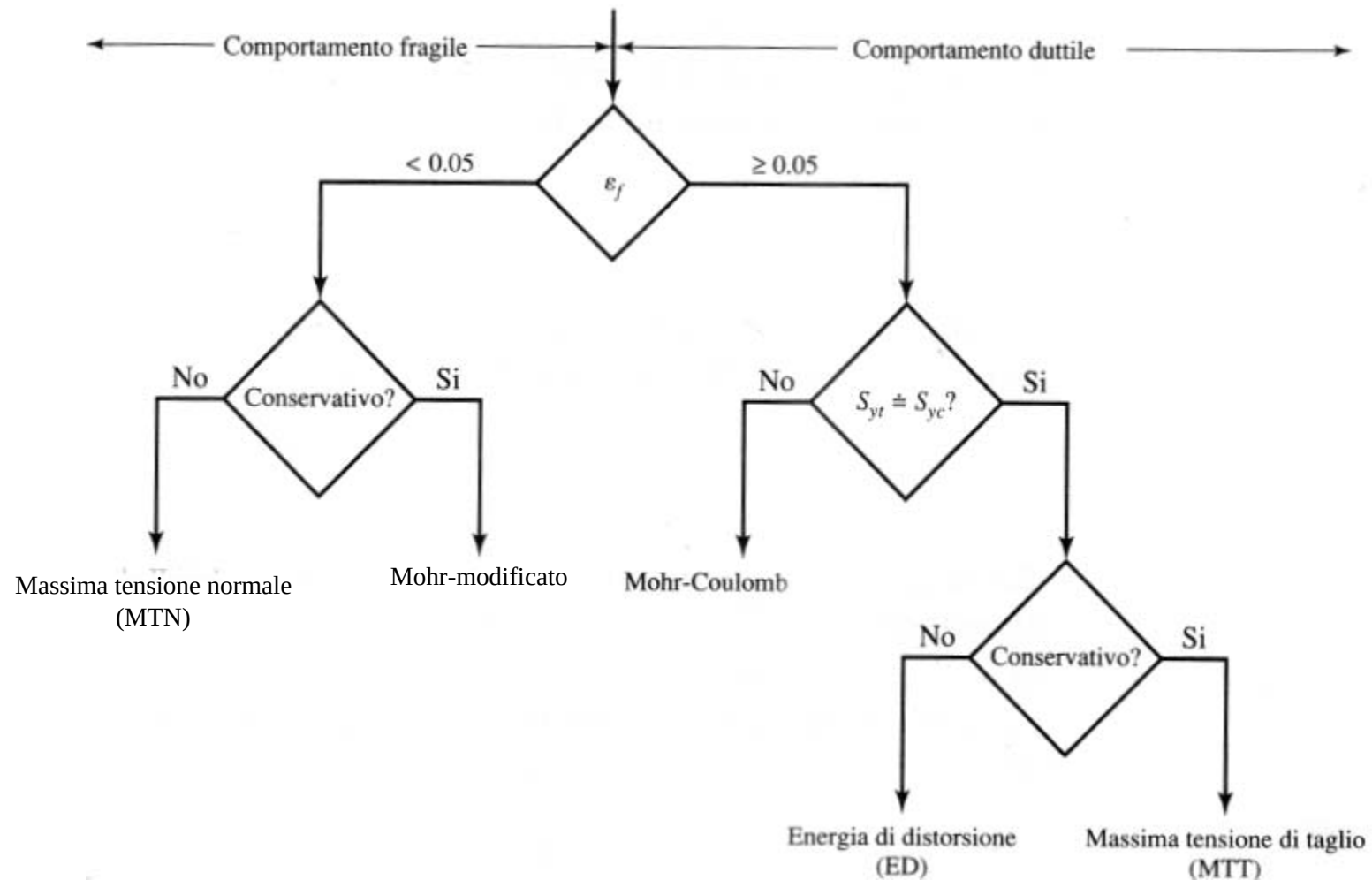


Per la previsione della rottura dei **materiali fragili** per i quali la resistenza a compressione è significativamente superiore a quella di trazione, è stata proposta una variante del Criterio di Mohr che prende il nome di “**Criterio di Mohr modificato**”

Questa versione del criterio si correla meglio con i dati sperimentali

Non dimentichiamo che i criteri di resistenza rappresentano una sorta di ripiego da utilizzare in assenza di evidenze sperimentali dirette, e dunque non deve sorprendere che alcuni criteri di carattere “generale” siano poi stati corretti sulla base di prove di laboratorio.

In sintesi...



Coefficienti di sicurezza

Storicamente, il concetto di coefficiente di sicurezza (fattore di sicurezza, *safety factor*) è stato spesso considerato come “un fattore di scala” mediante il quale ridurre la resistenza limite del materiale impiegato (o amplificare le tensioni di lavoro) per tenere conto di fattori imponderabili che potevano portare al collasso della struttura. Non deve quindi sorprendere il fatto che in alcuni vecchi testi siano raccomandati C.S. compresi tra 20 e 40!

Tale sovrastima era essenzialmente dovuta alla scarsa conoscenza dell'influenza di variabili quali

- *Concentrazione delle tensioni*
- *Urti*
- *Fenomeni di fatica*
- *Differenze di proprietà tra provino standard e materiale realmente impiegato*

I criteri di progettazione moderni cercano di tenere conto in modo razionale di tutti questi fattori, non trascurando inoltre quelli relativi ai costi di costruzione (comunque associati al sovradimensionamento) e quindi l'incertezza residua è computata mediante l'applicazione di C.S. compresi tra **1.25 e 4**

Coefficienti di sicurezza

Il C.S. deve essere calcolato sulla base della cosiddetta *Resistenza significativa* del materiale che generalmente non coincide con la resistenza statica a trazione: essa tiene conto, anche attraverso l'impiego di un opportuno criterio di resistenza, delle modalità con le quali il materiale arriva a cedimento.

Quindi, per esempio, se il cedimento comporta snervamento statico, il C.S. riferisce la resistenza statica a snervamento del materiale alla tensione statica causata dall'applicazione dei carichi previsti. Se il modo di cedimento previsto è la frattura fragile allora il C.S. si basa sulla resistenza a trazione e così via

$$C.S. = \frac{\text{Resistenza significativa del materiale}}{\text{Tensione significativa corrispondente}}$$

Appare chiaro che questo è un approccio di tipo deterministico!

Tuttavia l'approccio progettuale deterministico non è realistico... Tutte le incertezze sono "impacchettate" nel concetto di C.S. e, dunque, l'incertezza, inizialmente ignorata, rientra dalla porta di servizio.

Per quale motivo questo approccio continua ad avere una così larga diffusione?

E' facile da imparare ed utilizzare

Coefficienti di sicurezza

La scelta del C.S. più opportuno per una data progettazione, una volta che sia stato fatto il possibile per ottenere dati accurati sulla resistenza significativa del materiale, resta un onere esclusivo del progettista, il quale si deve basare sulla sua sensibilità e sull'esperienza (sua e di altri!!!) per formulare un C.S. che tenga conto dei margini di incertezza residui.

A volte, valori del C.S. sono esplicitamente raccomandati nella normativa tecnica di riferimento (es. ASME Pressure Vessels Code)

In ogni caso, occorre tenere sempre presente i seguenti fattori:

- *Grado di incertezza sui carichi*
- *Grado di incertezza sulla resistenza del materiale*
- *Incertezze nel correlare i carichi applicati e la resistenza del materiale*
- *Conseguenze del cedimento, sicurezza del personale e valutazioni economiche*
- *Costo necessario per ottenere un elevato coefficiente di sicurezza*

Coefficienti di sicurezza

Alcuni valori indicativi (Juvinall)

1.25 ÷ 1.5

Materiali eccezionalmente affidabili impiegati in condizioni controllate e soggetti a carichi e tensioni determinabili con certezza (valori impiegati nei casi in cui il contenimento del peso sia un requisito importante)

1.5 ÷ 2

Materiali ben caratterizzati, impiegati in condizioni ambientali ragionevolmente costanti, soggetti a carichi e tensioni determinabili con sicurezza

2 ÷ 2.5

Materiali di qualità media impiegati in ambienti ordinari e soggetti a carichi e tensioni determinabili

2.5 ÷ 3

Materiali poco caratterizzati o fragili in condizioni di ambiente, carico e tensione di media variabilità

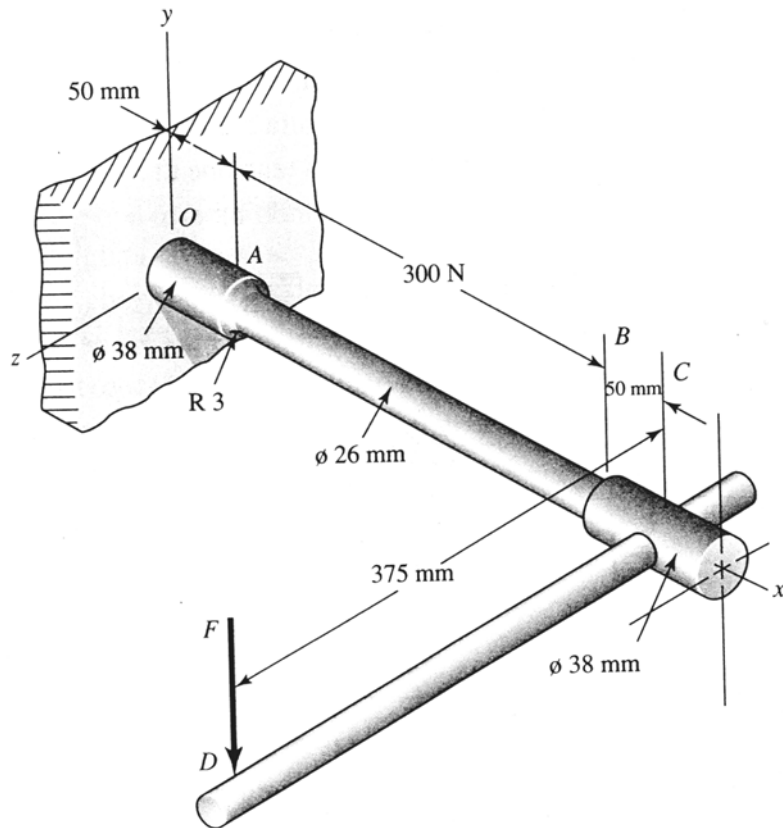
3 ÷ 4

Materiali non caratterizzati in condizioni di ambiente, carico e tensione di media variabilità

Esempio

Materiale: Acciaio AISI 1035, $\sigma_{sn} = 560 \text{ MPa}$, $\varepsilon_r = 0.08$

Determinare l'entità della forza F che produrrebbe snervamento nella leva



Azioni interne che interessano il tratto OC

Flessione (max in O)

$$M_f = 0.400F \text{ [Nm]}$$

Torsione (costante in tutto il tratto)

$$M_t = 0.375F \text{ [Nm]}$$

Sollecitazioni

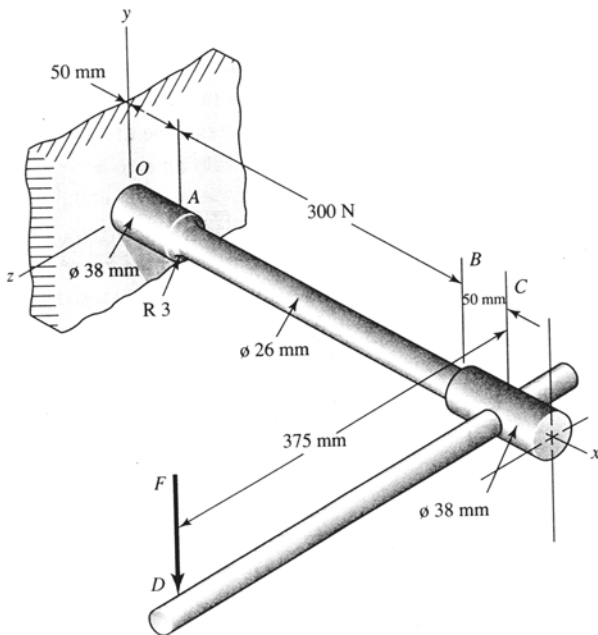
$$\sigma_x = \frac{10M_f}{d^3} = \frac{10 \cdot 0.4F}{0.026^3} = 0.227F \quad [\text{MPa}]$$

$$\tau_{xy} = \frac{5M_t}{d^3} = \frac{5 \cdot 0.375F}{0.026^3} = 0.107F \quad [\text{MPa}]$$

Esempio

Materiale: Acciaio AISI 1035, $\sigma_{sn} = 560 \text{ MPa}$, $\varepsilon_r = 0.08$

Determinare l'entità della forza F che produrrebbe snervamento nella leva



Applicando il criterio di Hueber-Von Mises (MED)

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(0.227F)^2 + 3(0.107F)^2} = F\sqrt{0.085876}$$

Uguagliando la tensione equivalente così ottenuta alla tensione di snervamento si ottiene

$$\sigma_{eq} = F\sqrt{0.085876} = 560 \text{ MPa}$$

$$F = \frac{560}{\sqrt{0.085876}} = 1911 \text{ N}$$